Sesión preparatoria para Olimpiadas Matemáticas (05/02/2021)

Bernabé Iturralde Jara

Desigualdades

Desigualdad entre medias

Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

Dándose la igualdad para $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Desigualdad de reordenamiento

Sean $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$ dos sucesiones crecientes de números reales. Entonces, $\forall\ \sigma(a_1', \dots, a_n')$ permutación de $\{a_i\}_{i=1}^n$, tenemos la desigualdad siguiente:

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \geq a_1' b_1 + \cdots + a_n' b_n \geq a_1 b_n + \cdots + a_n b_1$$

Desigualdad de Jensen

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ convexa en $[a, b]$. Entonces, $\forall\ x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, $\forall\ t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ tales que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ se tiene la siguiente desigualdad:

$$f(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n)$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sean $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ se tiene la desigualdad:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

Desigualdad de Chebyshev

Sean $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$ dos sucesiones de números reales. Si ambas están ordenadas de la misma forma (ambas crecientemente o ambas decrecientemente):

$$\frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}\right)$$

En caso de que estén ordenadas de manera contraria, la desigualdad se invierte.

Problemas:

1. Halla el mínimo de $\frac{sen^3 x}{\cos x} + \frac{cos^3 x}{sen\ x}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

2. Sean $x_1, \dots, x_n$ números naturales distintos. Demuestra que:

$$\frac{x_1}{1^2} + \cdots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Probar que:

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

4. Sean $x, y > 0$ tales que $x + y = 1$. Demuestra que:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

5. Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Probar la siguiente desigualdad:

$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

6. Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$.

a) Demuestra la desigualdad:

$$\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n}\log\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

b) Deduce del resultado del apartado a), la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

7. Sean $a, b, c > 0$ tales que $abc \geq ab + bc + ca$. Demuestra que:

$$abc \geq 3(a + b + c)$$

8. Sean $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, con $x, y > 0$. Demuestra que es cierta la siguiente desigualdad:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

9. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tales que suman 1. Probar que:

$$\left(a^{a^2+2ca}\right)\left(b^{b^2+2ab}\right)\left(c^{c^2+2bc}\right) \geq \frac{1}{3}$$

10. Probar que $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^+$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}$$

Para consultar más problemas o profundizar en teoría recomiendo *Estudio y discusión sobre problemas de olimpiada. Desigualdades.* (Iván Valero Terrón).